

УДК 517.6

Е. Е. Гришина, Е. Д. Деревянчук, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДВУХ СЕКЦИЯХ С РАЗНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Аннотация. Рассмотрена задача дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом теле в форме параллелепипеда, расположенном в прямоугольном волноводе и состоящем из двух слоев с разной диэлектрической проницаемостью. Получено аналитическое решение уравнений Максвелла для случая заполнения двух секций волновода. Представлены результаты численных расчетов решения интегродифференциального уравнения методом коллокации.

Ключевые слова: электромагнитная задача дифракции, аналитическое решение задачи дифракции, метод коллокаций.

Abstract. Electromagnetic diffraction problem on dielectric body located in rectangular waveguide and consisted of two layers is considered. The analytical solving of Maxwell's equations in case of filling of two section of the waveguide is obtained. Numerical results for solution of integro-differential equation by collocation method are presented.

Keywords: electromagnetic diffraction problem, analytical solution of diffraction problem, collocation method.

Введение

В работе [1] была рассмотрена задача расчета электромагнитной дифракции на диэлектрическом теле, расположенном в прямоугольном волноводе. В статье [2] в качестве тела был взят однородный диэлектрический параллелепипед и было получено аналитическое и численное решение уравнений Максвелла для данного частного случая. В настоящей работе в качестве тела Q рассматривается параллелепипед, состоящий из двух слоев с разной диэлектрической проницаемостью. Полученные результаты могут быть применены в различных практических приложениях.

Постановка задачи, численный метод

Пусть в декартовой системе координат $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$ – волновод с идеально проводящей поверхностью ∂P . Пусть Q ($Q \subset P$ – область) – объемное тело, расположенное в волноводе, с постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной 3×3 -матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\epsilon}(x)$ являются ограниченными функциями в области $\bar{Q}$, $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$, а также $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$.

Рассмотрим задачу о нахождении электромагнитного поля $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,\text{loc}}(P)$, возбуждаемого в волноводе сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$. Электрический ток $\mathbf{j}^0 \in L_{2,\text{loc}}(P)$ – источник сто-

ронного поля. Стандартные дифференциальные операторы grad , div , rot в области $P \subset R^3$ понимаются в смысле обобщенных функций.

Будем искать обобщенные решения уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0; \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}.\end{aligned}\quad (1)$$

Учитывая условия на бесконечности и краевые условия, описанные в [3], уравнения Максвелла можно свести к интегродифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}E(x) &= E_0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left(\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - I \right) E(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left(\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - I \right) E(y) dy, \quad x \in Q.\end{aligned}\quad (2)$$

Компоненты диагонального тензора Грина $\hat{G}_E$ имеют вид [4, 5]

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2; \quad (3)$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2; \quad (4)$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2. \quad (5)$$

В этих выражениях $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$, при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\text{Im } \gamma_{nm} \geq 0$.

Будем предполагать, что тензор диэлектрической проницаемости тела $\hat{\epsilon}(x)$ удовлетворяет условиям $\left(\frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I}\right)$, обратим в $\bar{Q}$ и $\left(\frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I}\right)^{-1} \in L_{\infty}(Q)$, где $\hat{I}$ – единичный тензор. Введем обозначения:

$$\xi = \left(\frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I}\right)^{-1}, \quad \mathbf{J} := \left(\frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I}\right) \mathbf{E}.$$

Описанное выше позволяет перейти к следующему уравнению:

$$A\mathbf{J} = \xi \mathbf{J}(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x). \quad (6)$$

Уравнение (6) может быть решено различными численными методами. Например, методом Галеркина или методом коллокации. В данной работе был выбран метод коллокации, так как использование метода Галеркина влечет за собой более громоздкие формулы и выкладки.

Известные методы не позволяют рассчитать электромагнитное поле для волновода, состоящего из нескольких частей с различной диэлектрической проницаемостью. В настоящей статье будет получено аналитическое решение уравнений (1) для тела Q , являющегося секцией волновода и состоящего из двух частей с различной диэлектрической проницаемостью. Также будут представлены результаты численных расчетов для метода коллокации.

Аналитическое решение в частном случае для задачи дифракции

Пусть тело Q представляет собой секцию волновода: $Q = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < c\}$ (рис 1). Тело представляет собой перегородку волновода длиной l_2 по оси x_3 . В области $0 < x_3 < l_1$ тело имеет постоянную диэлектрическую проницаемость ϵ_1 , а в области $l_1 < x_3 < l_2$ тело имеет постоянную диэлектрическую проницаемость ϵ_2 .

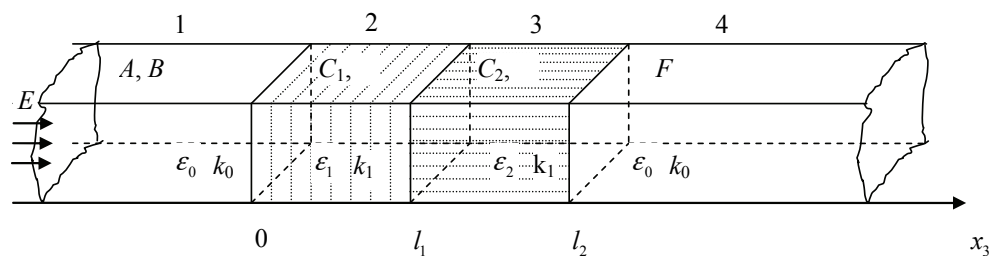


Рис. 1

Будем предполагать, что размеры волновода удовлетворяют условию

$$\frac{\pi}{a} < k_0 < \frac{\pi}{b},$$

при котором распространяется только одна волна в волноводе [8].

Рассмотрим поведение поля внутри тела. Предположим, что падающее поле имеет вид

$$E = A \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) e^{-i\gamma_1 x_3} \mathbf{e}_2. \quad (7)$$

Здесь и далее в статье под коэффициентами A и F будем подразумевать следующие выражения: $A = A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a}$ и $F = Q_1^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a}$, а

$$\gamma_0 = \gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}, \quad \gamma_1 = \sqrt{k_1^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{k_2^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

В области 2 ($x_3 \in (0, l_1)$) поле имеет вид

$$\mathbf{E} = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \left(C_1 e^{-i\gamma_1 x_3} + D_1 e^{i\gamma_1 x_3} \right) \mathbf{e}_2. \quad (8)$$

В области 3 $x_3 \in (l_1, l_2)$ поле имеет представление

$$\mathbf{E} = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \left(C_2 e^{-i\gamma_2 x_3} + D_2 e^{i\gamma_2 x_3} \right) \mathbf{e}_2. \quad (9)$$

В области 4 $x_3 \in (l_2, \infty)$ поле имеет представление

$$\mathbf{E} = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \left(F e^{-i\gamma_0 x_3} \right) \mathbf{e}_2. \quad (10)$$

На границе областей 1 и 2, областей 2 и 3, а также на границе областей 3 и 4 должны выполняться условия сопряжения [2]:

$$\begin{aligned} [E_2]_{x_3=0} &= [E_2]_{x_3=c} = 0; \\ [H_1]_{x_3=0} &= [H_1]_{x_3=c} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right]_{x_3=0} = \left[\frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right]_{x_3=c} = 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{E} = E_2 \mathbf{e}_2$.

Для коэффициентов $A, B, C_1, D_1, C_2, D_2, F$ получаем уравнения:

– при $x_3 = 0$:

$$\begin{cases} A + B = C_1 + D_1, \\ \gamma_0 (B - A) = \gamma_1 (D_1 - C_1); \end{cases} \quad (11)$$

– при $x_3 = l_1$:

$$\begin{cases} C_1 e^{-i\gamma_1 l_1} + D_1 e^{i\gamma_1 l_1} = C_2 e^{-i\gamma_2 l_1} + D_2 e^{i\gamma_2 l_1}, \\ \gamma_1 (-C_1 e^{-i\gamma_1 l_1} + D_1 e^{i\gamma_1 l_1}) = \gamma_2 (-C_2 e^{-i\gamma_2 l_1} + D_2 e^{i\gamma_2 l_1}); \end{cases} \quad (12)$$

– при $x_3 = l_2$:

$$\begin{cases} C_2 e^{-i\gamma_2 l_2} + D_2 e^{i\gamma_2 l_2} = F e^{-i\gamma_0 l_2}, \\ \gamma_2 (-C_2 e^{-i\gamma_2 l_2} + D_2 e^{i\gamma_2 l_2}) = -\gamma_0 F e^{-i\gamma_0 l_2}. \end{cases} \quad (13)$$

Коэффициент A известен, для коэффициентов B, C_1, D_1, C_2, D_2, F получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2A\gamma_0}{e^{-2i\gamma_1 l_1} (\gamma_0 - \gamma_1) \frac{2\gamma_2 - r \cdot s1}{r \cdot s2 - 2\gamma_2} + \gamma_0 + \gamma_1}, \quad D_1 = \frac{2A\gamma_0}{\gamma_0 - \gamma_1} - C_1 \cdot \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{\gamma_0 - \gamma_1}, \\ D_2 &= \frac{1}{2\gamma_2} e^{-i\gamma_2 l_1} \left[C \left(s1 \cdot e^{-i\gamma_1 l_1} - \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{\gamma_0 - \gamma_1} \cdot s2 \cdot e^{i\gamma_1 l_1} \right) + \frac{2A\gamma_0}{\gamma_0 - \gamma_1} e^{i\gamma_1 l_1} \cdot s2 \right], \\ C_2 &= \frac{\gamma_0 + \gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_0} \cdot e^{2i\gamma_2 l_2} D_2, \quad B = \frac{1}{2\gamma_0} \cdot (C_1 (\gamma_0 - \gamma_1) + D_1 (\gamma_0 + \gamma_1)), \end{aligned}$$

$$F = e^{i\gamma_0 l_2} \left(C_2 e^{-i\gamma_2 l_2} + D_2 e^{i\gamma_2 l_2} \right),$$

где $r = e^{2i\gamma_2 l_2 - 2i\gamma_2 l_1} \left(\frac{\gamma_0 + \gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_0} \right) + 1$, $s_1 = \gamma_2 - \gamma_1$, $s_2 = \gamma_2 + \gamma_1$.

Численное решение

Рассмотрим вопрос о построении схемы метода коллокации для решения объемного сингулярного интегродифференциального уравнения, к которому сводится краевая задача дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле, расположенном в прямоугольном волноводе [4–8].

Сформулируем метод коллокации для интегродифференциального уравнения (2). Этот подход оказывается эффективным в силу более удобного представления интегралов. Рассмотрим подробнее уравнение (6):

$$A\mathbf{J} = \xi \mathbf{J}(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x).$$

Здесь $\vec{E}$ – неизвестное электрическое поле; $\mathbf{E}^0$ – известное внешнее электрическое поле (распространяющаяся волна в волноводе); k_0 – волновое число вакуума, $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$; ω – круговая частота.

Представим это уравнение в виде системы трех скалярных уравнений:

$$\sum_{i=1}^3 \xi_{li} J^i(x) - k_0^2 \int_Q G(x, y) J^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_l} \text{div}_x \int_Q G(x, y) \vec{J}(y) dy = E^{0l}(x), \quad (14)$$

$l = 1, 2, 3$.

Будем искать компоненты приближенного решения $\vec{J}$ в виде

$$\vec{J}^1 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^1 f_k^1(x), \quad \vec{J}^2 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 f_k^2(x), \quad \vec{J}^3 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^3 f_k^3(x),$$

где f_k^i – базисные функции.

Ниже проводится построение функций f_k^i . Будем считать, что Q – параллелепипед: $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, \quad b_1 < x_2 < b_2, \quad c_1 < x_3 < c_2\}$. Разобьем тело Q на элементарные параллелепипеды:

$$P_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, \quad x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, \quad x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\};$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n} k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n} l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n} m,$$

где $k, l, m = 0, \dots, n-1$.

Будем считать, что шаг по каждой координате постоянен: $h^i := |x_{i,k} - x_{i,k-1}|$. Наряду с обычной нумерацией нам удобно будет ввести трехиндексную нумерацию базисных функций. Определим f_{klm}^i ($i = 1, 2, 3$):

$$f_{klm}^i = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Pi}_{klm}, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}. \end{cases}$$

Построенное множество базисных функций удовлетворяет необходимому условию аппроксимации в $L_2^3(Q) = L_2(Q) \times L_2(Q) \times L_2(Q)$.

Расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов $\alpha_k^1, \alpha_k^2, \alpha_k^3$ удобно представить в блочной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right).$$

Элементы столбцов B_k и матриц A_{kl} определяются из соотношений:

$$B_k^i = E_0^k(x_i); \quad (15)$$

$$A_{kl}^{ij} = \xi_{kl} f_i^l(x_j) - \delta_{kl} k_0^2 \int_Q G^k(x_j, y) f_i^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G^l(x_j, y) f_i^l(y) dy, \quad (16)$$

где координаты точек коллокации имеют вид

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) \quad x_{i1} = (i_1 + 0,5)h_1, \quad x_{i2} = (i_2 + 0,5)h_2, \quad x_{i3} = (i_3 + 0,5)h_3,$$

$$k, l = 1, 2, 3; \quad i, j = 1, \dots, N.$$

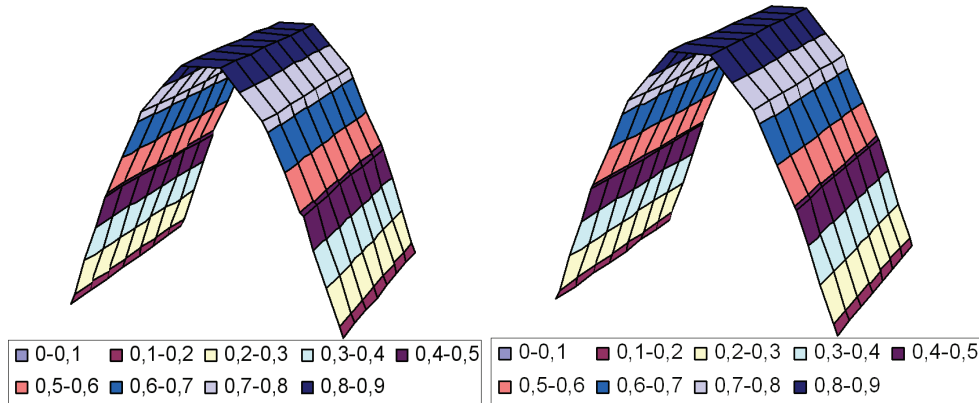
Таким образом, представлены расчетные формулы для матричных коэффициентов метода коллокации.

Так как базисные функции равны 1 только внутри элементарного параллелепипеда Π_{klm} , интегралы в интегральном уравнении вычисляются аналитически. В результате элементы матрицы вычисляются суммированием медленно сходящихся рядов. В полученных рядах целесообразно выделить особенность. Медленно сходящиеся ряды без особенности представлены в [4, 5].

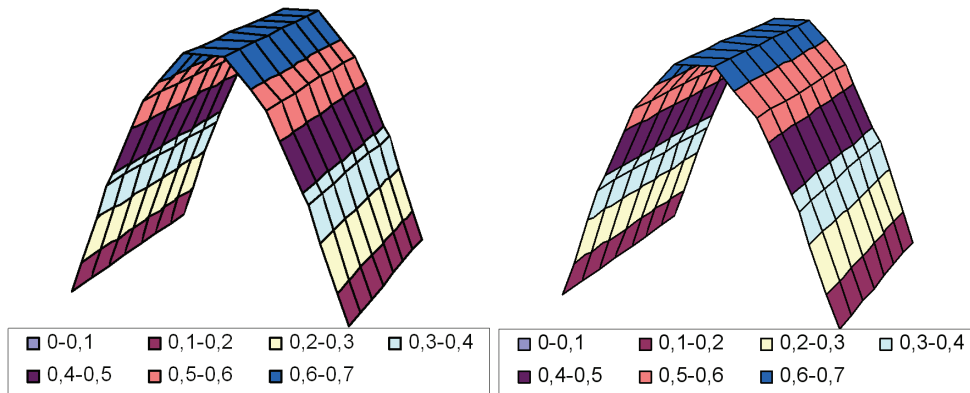
Численные результаты

Для численного решения задачи разобьем параллелепипед Q на $N = n \cdot n \cdot n$ элементарных параллелепипедов. Здесь n – количество разбиений параллелепипеда Q по одному направлению. Перебирая всевозможные комбинации пар элементарных параллелепипедов, заполняем матричные элементы с помощью формулы (21). Для перебора удобно использовать трехиндексную нумерацию параллелепипедов. Правая часть СЛАУ заполняется при помощи формулы (20). Полученную СЛАУ решаем методом сопряженных градиентов. Используя субиерархический метод, значение поля можно вычислить не только для параллелепипеда, но и для фигуры более сложной формы [9, 10].

На рис. 2–3 представлено сравнение поведения полей внутри тела с переменной диэлектрической проницаемостью, расположенного в прямоугольном волноводе. Тело представляет собой секцию волновода в форме прямоугольного параллелепипеда с длиной a по оси x_1 , b по оси x_2 и l_2 по оси x_3 . В области $0 < x_3 < l_1$ ($l_1 < l_2$) тело имеет постоянную диэлектрическую проницаемость $\epsilon_1 = 1,4$, а в области $l_1 < x_3 < l_2$ тело имеет постоянную диэлектрическую проницаемость $\epsilon_2 = 1,9$. Сетка имеет размер $n = 8$ по каждому направлению. На рис. 2 и 3 приведены результаты аналитического решения и численного решений. Слева представлены результаты аналитического решения, справа – результаты численного решения.

Рис. 2. Третий слой, $0,5 < x_3 < 0,75$.

Модуль максимум разности поля на слое равен 0,00724

Рис. 3. Шестой слой, $1,25 < x_3 < 1,5$.

Модуль максимум разности поля на слое равен 0,01613

Размеры волновода и электродинамические параметры: $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $\epsilon_1 = 1,4$, $\epsilon_2 = 1,9$, $k_0 = 2,5$. В табл. 1 приведены результаты, отображающие максимум модуля разности аналитического и численного решений на каждом слое.

Расчеты показывают хорошее согласие численного решения с аналитическими результатами.

Сравнение аналитического и численного решений

Номер слоя	Граница слоя по x_3	Максимум модуля разности
1 слой	$0,0 < x_3 < 0,25$	0,01945
2 слой	$0,25 < x_3 < 0,5$	0,00501
3 слой	$0,5 < x_3 < 0,75$	0,00724
4 слой	$0,75 < x_3 < 1,0$	0,00199
5 слой	$1,0 < x_3 < 1,25$	0,00924
6 слой	$1,25 < x_3 < 1,5$	0,01613
7 слой	$1,5 < x_3 < 1,75$	0,00741
8 слой	$1,75 < x_3 < 2,0$	0,00203

Список литературы

1. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и Связь, 1998.
2. **Гурина, Е. Е.** Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 32–43.
3. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : Радиотехника, 1996.
4. **Васюнин, Д. И.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Д. И. Васюнин, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 68–78.
5. **Медведик, М. Ю.** Численное решение объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4. – С. 55–71.
6. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 11–24.
7. **Shestopalov, Yu. V.** Volume Singular Integral Equations Method for Determination of Effective Permittivity of Meta- and Nanomaterials / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // Proceedings of Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2008). – Cambridge, USA. – 2008. – July 2–6. – P. 291–292.
8. **Smirnov, Yu. G.** Inverse Boundary Value Problem for Determination of Permittivity of Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation / Yu. G. Smirnov // IEEE Transactions on Fundamentals and Materials. – 2009. – V. 129. – № 10. – P. 675–680.
9. **Медведик, М. Ю.** Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.
10. **Смирнов, Ю. Г.** Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной

диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 2–10.

Гришина Елена Евгеньевна

аспирант, Пензенский государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Grishina Elena Evgenyevna

Postgraduate student,
Penza State University

Деревянчук Екатерина Дмитриевна

студентка, Пензенский государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Derevyanchuk Ekaterina Dmitrievna

Student, Penza State University

Медведик Михаил Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: _medv@mail.ru

Medvedik Mikhail Yuryevich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuri Gennadyevich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University

УДК 517.6

Гришина, Е. Е.

Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на двух секциях с разной диэлектрической проницаемостью, расположенных в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гришина, Е. Д. Деревянчук, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4 (16). – С. 73–81.